Logaritmus

Čo je logaritmus?

$$a = z^x \qquad z = \sqrt[x]{a} \qquad x = \log_z a$$

Logaritmus $\log_z a$ je číslo, na ktoré musíme umocniť **základ (báza) z**, aby sme dostali **argument a.**

$$z^{\log_z a} = a \qquad z > 0,\ z \neq 1,\ a > 0$$

- Ak pri logaritme nie je uvedený základ, pokladá sa za dekadický, tj. so základom 10.

$$\log a \equiv \log_{10} a$$

- Logaritmus pri základe e = 2,718281828460... sa nazýva prirodzený a označuje sa ln (*logarithmus naturalis*).

$$\ln a \equiv \log_e a$$

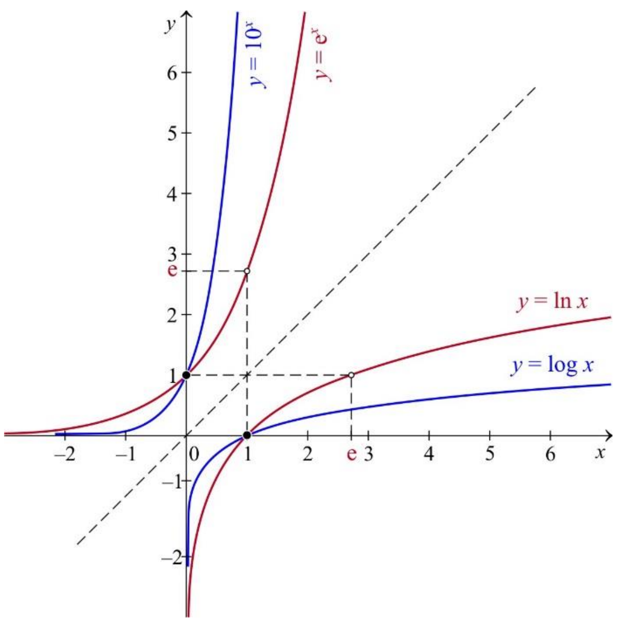
Platí, že $\boxed{z^{\log_z a} = \log_z z^a = a}$, teda $\boxed{e^{\ln a} = \ln e^a = a}$, resp. $\boxed{10^{\log a} = \log 10^a = a}$.

logaritmus súčinu sa rovná súčtu logaritmov činiteľov	$\log_z (a \,.\, b) = \log_z a + \log_z b$
logaritmus podielu sa rovná rozdielu logaritmov delenca a deliteľa	$\log_z (a / b) = \log_z a - \log_z b$
násobok logaritmu sa rovná logaritmu mocniny	$b \log_z a = \log_z a^b$
prepočet logaritmu na iný základ	$\log_z a = \dfrac{\log_x a}{\log_x z}$

Najčastejší je vzájomný prepočet medzi prirodzeným a dekadickým logaritmom:

$$\ln a \equiv \log_e a = \frac{\log a}{\log e} = \frac{\log a}{0,43424} = 2,3026 \log a$$

Teda $\boxed{\ln a = 2,303 \log a}$, resp. $\boxed{\log a = 0,4343 \ln a}$.
Logaritmické a exponenciálne funkcie využijete počas štúdia nespočetne veľa krát. Zapamätajte si ich priebeh!



- Grafy všetkých exponenciálnych funkcií typu $y = z^x$ prechádzajú bodmi (0; 1) a (1; z).
- Grafy všetkých logaritmických funkcií typu $y = \log_z x$ prechádzajú bodmi (1; 0) a (z; 1).
- Všetky exponenciálne funkcie sú definované pre x z intervalu $(-\infty; \infty)$.
  Pre x z intervalu $(-\infty; 0)$ je y z intervalu $(0; 1)$.
  Pre x z intervalu $(0; \infty)$ je y z intervalu $(1; \infty)$.
- Všetky logaritmické funkcie sú definované pre x z intervalu $(0; \infty)$.
  Pre x z intervalu $(0; 1)$ je y z intervalu $(-\infty; 0)$.
  Pre x z intervalu $(1; \infty)$ je y z intervalu $(0; \infty)$.
- Exponenciálne a logaritmické funkcie pri rovnakých základoch sú navzájom inverzné, tzn., že ich grafy sú súmerné podľa priamky $y = x$.

Každý **argument** dekadického logaritmu možno vyjadriť v tvare a . 10^b, preto

$$\log (a \cdot 10^b) = \log a + b \log 10 = \log a + b$$

Pretože a je vždy číslo z intervalu ⟨1; 10), nadobúda log a hodnoty z intervalu ⟨0 do 1).
Pre argumenty, ktoré sa líšia len mocninou desiatky, teda získame logaritmy, ktorých časť za desatinnou čiarkou je rovnaká, napr.

$$\log 0{,}00245 = \log (2{,}45 \cdot 10^{-3}) = \log 2{,}45 + \log 10^{-3} = 0{,}389 - 3 = -2{,}611$$

$$\log 0{,}0245 = \log (2{,}45 \cdot 10^{-2}) = \log 2{,}45 + \log 10^{-2} = 0{,}389 - 2 = -1{,}611$$

$$\log 0{,}245 = \log (2{,}45 \cdot 10^{-1}) = \log 2{,}45 + \log 10^{-1} = 0{,}389 - 1 = -0{,}611$$

$$\log 2{,}45 = \log (2{,}45 \cdot 10^{0}) = \log 2{,}45 + \log 10^{0} = 0{,}389 + 0 = 0{,}389$$

$$\log 24{,}5 = \log (2{,}45 \cdot 10^{1}) = \log 2{,}45 + \log 10^{1} = 0{,}389 + 1 = 1{,}389$$

$$\log 245 = \log (2{,}45 \cdot 10^{2}) = \log 2{,}45 + \log 10^{2} = 0{,}389 + 2 = 2{,}389$$

Číslo 0,389 nazývame **mantisa** logaritmu. Čísla 0, 1 a 2 nazývame **charakteristika** logaritmu. Táto vlastnosť logaritmov sa v minulosti, keď ešte neboli k dispozícii kalkulačky, využívala pri hľadaní logaritmov ľubovoľných čísel. Hodnoty mantís sa vyhľadávali v knižne vydávaných tabuľkách.
Z vyššie uvedeného príkladu vidno, že aj keď majú argumenty logaritmu (0,00245; 0,0245; 0,245; 2,45; 24,5 a 245) rôzny počet desatinných miest, majú rovnaký počet platných číslic. Preto sú rovnaké aj ich mantisy a ich logaritmy sa líšia len charakteristikami. Presnosť výsledku logaritmovania je teda určená len počtom jeho desatinných miest. Preto pri zaokrúhľovaní logaritmov platí pravidlo, že **počet desatinných miest logaritmu sa rovná počtu platných číslic jeho argumentu**, napr. log 62,745 = 1,79758. A naopak, pri odlogaritmovaní, **počet platných číslic výsledku sa rovná počtu desatinných miest argumentu odlogaritmovania**, napr. $10^{1{,}79758}$ = 62,745.